

# Identiska Partiklar och Anyoner

Linus Wulff

31 mars 2003

Fysikum, Stockholms Universitet

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Konfigurationsrummet</b>	<b>2</b>
2.1	Identiska Partiklar på en Linje . . . . .	3
2.2	Identiska Partiklar i Planet . . . . .	3
2.3	Identiska Partiklar i Rummet . . . . .	5
2.4	Identiska Partiklar på en Cirkel . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Kvantisering</b>	<b>6</b>
3.1	Identiska Partiklar på en Linje . . . . .	7
3.2	Identiska Partiklar i Planet . . . . .	9
3.3	Identiska Partiklar i Rummet . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Sammanfattning</b>	<b>15</b>

# 1 Inledning

Det faktum att elementära partiklar med samma kvanttal, som t.ex. två elektroner med spinn upp, är sinsemellan identiska har vittgående konsekvenser i kvantfysiken. I kvantfysiken får nämligen ordet identisk en djupare innebörd än i den klassiska fysiken. Om vi har två identiska partiklar, d.v.s. partiklar med alla egenskaper lika, med koordinater  $\mathbf{a}$  resp.  $\mathbf{b}$  kan vi enligt klassisk fysik bestämma oss för att kalla partikeln i  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  för Partikel 1 och partikeln i  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  för Partikel 2. Så länge partiklarnas koordinater inte sammanfaller kan vi sedan kontinuerligt följa partiklarnas banor genom att hela tiden mäta deras positioner. Om, efter tiden  $t$ , partiklarna befinner sig i  $\mathbf{x} = \mathbf{c}$  resp.  $\mathbf{x} = \mathbf{d}$  kan vi genom att vi följt partiklarna avgöra om det är Partikel 1 eller Partikel 2 som befinner sig i  $\mathbf{x} = \mathbf{c}$  resp.  $\mathbf{d}$ . Så länge partiklarnas positioner inte sammanfaller kan vi därför i klassisk fysik tillskriva dem egna identiteter (Partikel 1 och Partikel 2 eller Kalle Stropp och Grodan Boll eller ...).

Detta är inte längre fallet då vi går över till kvantfysiken. I kvantfysiken är det inte längre möjligt att kontinuerligt följa en partikels bana. Följden av detta blir att vi inte kan tilldela partiklarna olika identitet eftersom det alltid är teoretiskt möjligt att de "byter plats" med varandra mellan våra observationer. Ett uttalande som "Partikel 1 befinner sig i  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  och Partikel 2 i  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ " innehåller överflödigt information eftersom det inte kan skiljas från uttalandet "Partikel 1 befinner sig i  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  och Partikel 2 i  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ ". Vi bör därför endast säga "En partikel befinner sig i  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  och en partikel i  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ " eftersom tillskrivande av olika identitet åt partiklarna blir meningslöst.

Hur man matematiskt ska hantera denna icke-särskiljbarhet är inte helt självklart. Det sätt man gjort det på rent historiskt, och som återfinns i de allra flesta böcker om kvantmekanik, är som följer: Man skriver vågfunktionen för  $n$  identiska partiklar som  $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  där  $\mathbf{x}_k$  är koordinaterna för partikel  $k$ , som om partiklarna vore särskiljbara. Att partiklarna är identiska för man sedan in genom att säga att den fysikaliska situationen skall vara oförändrad om partiklarna byter plats sinsemellan, och uttrycker detta matematiskt som

$$|\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)|^2 = |\psi(p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n))|^2 \quad (1)$$

där  $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  är någon permutation av  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ . Man tittar sedan på fallet med två identiska partiklar och inför operatoren  $\mathcal{P}$  som byter plats på partiklarna, d.v.s.  $\mathcal{P}\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ . Enligt (1) har vi  $|\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 = |\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)|^2$  eller  $\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = e^{i\delta}\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  och vi får  $\mathcal{P}\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = e^{i\delta}\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Vi opererar med  $\mathcal{P}$  igen och får  $\mathcal{P}^2\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = e^{i\delta}\mathcal{P}\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (e^{i\delta})^2\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , men eftersom  $\mathcal{P}^2$  byter plats på de två partiklarna två gånger ändrar den ingenting och vi måste ha  $\mathcal{P}^2\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Dessa samband ger att  $(e^{i\delta})^2 = 1$  eller  $e^{i\delta} = \pm 1$  och  $\mathcal{P}\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \pm\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Vi får alltså två slags partiklar, de vars vågfunktioner svarar mot egenvärdet +1 kallas bosoner och de vars vågfunktioner svarar mot egenvärdet -1 kallas fermioner.

Eftersom denna förutsägelse av två partikelslag stämde med vad man fann i naturen och eftersom härledningen intuitivt verkar riktig dröjde det ända in på 1970-talet innan detta synsätt började ifrågasättas.

Problemet bottnar i att man inför index och på detta sätt behandlar partiklarna som särskiljbara. När vi "byter plats" på partiklarna genom att skriva lägesvektorerna i en annan ordning i vågfunktionen har detta ingen fysikalisk

betydelse och höger och vänster led i (1) har ingen separat mening. Ekvationen uttrycker därför endast godtyckligheten i denna notation, d.v.s. att samma fysikaliska situation kan representeras på flera olika sätt.

Denna text följer i stort sett upplägget hos den artikel av J.M. Leinaas och J. Myrheim från 1977<sup>1</sup> som till slut gav en tillfredsställande hantering av identiska partiklar i icke-relativistisk kvantmekanik, 50 år efter teorins födelse. Jag har valt att lägga tonvikten på teorin för identiska partiklar i en och två dimensioner i kvantmekaniken, ett område som blivit aktuellt på senare tid bl.a. i och med (den fraktionella) kvanthalleffekten, vars upptäckt belönades med 1998 års nobelpris i fysik<sup>2</sup>.

## 2 Konfigurationsrummet

Istället för att införa index för partiklarna och symmetrikrav på vågfunktionen kan godtyckligheten i ordningen av lägesvektorerna tas bort på ett naturligt sätt. Tanken är att använda ett konfigurationsrum (definitionsområdet för  $\psi$ ) för vågfunktionen där alla punkter  $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  är identifierade, d.v.s. samma punkt. Detta istället för den vanliga Cartesiska produkten<sup>3</sup> av enpartikelrummen. Om  $\mathbb{X}$  är koordinatrummet för en partikel och vi har  $N$  identiska partiklar i detta rum beskriver man vanligen de möjliga konfigurationerna för dessa partiklar som punkter i  $\mathbb{X}^N$ , som är den Cartesiska produkten av enpartikelrummen. Men eftersom partiklarna är identiska är det ingen fysikalisk skillnad på punkter i konfigurationsrummet som endast skiljer sig genom ordningen av partiklarnas lägesvektorer (vilket svarar mot en permutation av axlarna i konfigurationsrummet). Punkterna  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  och  $\mathbf{x}' = p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  där  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{X}$  och  $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  är någon permutation av lägesvektorerna, beskriver alltså samma fysikaliska konfiguration av partiklarna. Det samma konfigurationsrummet är alltså inte  $\mathbb{X}^N$  utan det rum som fås om man i  $\mathbb{X}^N$  identifierar alla punkter som svarar mot samma fysikaliska situation. Vi kallar detta rum  $\mathbb{X}^N/S_N$  eftersom det fås genom att ”dividera” ut den symmetriska gruppen  $S_N$ .  $\mathbb{X}^N/S_N$  är lokalt isomorft med  $\mathbb{X}^N$  utom i dess singulära punkter, d.v.s. punkter som svarar mot att två eller flera partiklar befinner sig i samma punkt.  $\mathbb{X}^N/S_N$  skiljer sig dock från  $\mathbb{X}^N$  i sin globala struktur. I den klassiska fysiken har de globala egenskaperna hos konfigurationsrummet mycket liten betydelse eftersom man kontinuerligt kan följa en partikels bana. I kvantfysiken däremot kan man inte längre kontinuerligt följa en partikels bana och konfigurationsrummets globala egenskaper blir viktiga. Vi ska nu se hur  $\mathbb{X}^N/S_N$  ser ut i några olika fall. Antag att enpartikelrummet  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ . Det står klart att vi måste använda oss av relativa koordinater så vi inför masscentrumkoordinaten

$$\mathbf{X}_{cm} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$$

där  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$  är de  $N$  partiklarnas koordinater.  $\mathbf{X}_{cm}$  är invariant under  $S_N$  (som ju endast byter plats på partiklarna) och  $N$ -partikelrummet kan skrivas som en

<sup>1</sup>”On the theory of identical particles”, J.M. Leinaas och J. Myrheim, *Nuovo Cimento*, **37B** N. 1 (1977).

<sup>2</sup>Se t.ex. Kungliga Vetenskapsakademiens hemsida <http://www.kva.se>.

<sup>3</sup>Den Cartesiska produkten av rummen  $\mathbb{A}$  och  $\mathbb{B}$  definieras som  $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(a, b) | a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}\}$ .

Cartesisk produkt

$$(\mathbb{R}^n)^N/S_N = \mathbb{R}^n \times r(n, N)$$

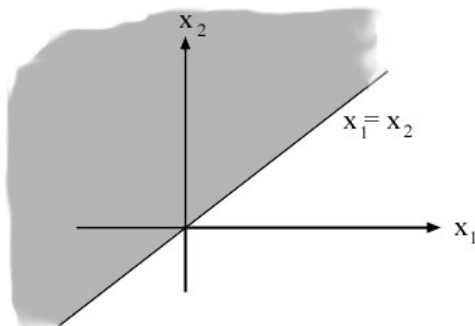
av masscentrumrummet  $\mathbb{R}^n$  och något "relativt" rum  $r(n, N)$  för partiklarnas relativa positioner. Om vi begränsar oss till system med två partiklar,  $N = 2$ , blir  $r(n, 2)$  det rum som fås om man i  $\mathbb{R}^n$  identifierar punkterna  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  och  $-\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ . Detta rum har en singular punkt, nämligen  $\mathbf{x} = 0$ , som svarar mot att partiklarna befinner sig i samma punkt. Om vi utesluter denna punkt får vi återigen en Cartesisk produkt

$$r(n, 2) - \{0\} = ]0, \infty[ \times \mathbb{P}_{n-1}$$

av den positiva reella axeln, som ger längden  $|\mathbf{x}|$  av vektorn  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , och det  $(n - 1)$ -dimensionella rummet  $\mathbb{P}_{n-1}$ , som ger riktningen  $\pm \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$  av  $\mathbf{x}$ .  $\mathbb{P}_{n-1}$  är alltså enhetssfären i  $n - 1$  dimensioner med (diametralt) motstående punkter identifierade.

## 2.1 Identiska Partiklar på en Linje

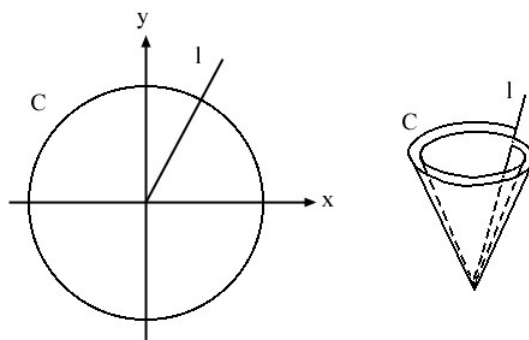
Det enklaste fallet är då två partiklar rör sig längs en linje, d.v.s.  $N=2$ ,  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ . Konfigurationsrummet blir då  $\mathbb{R}^2$  med punkter  $(x_1, x_2)$  och  $(x_2, x_1)$  identifierade, d.v.s. halvplanet med t.ex.  $x_1 \geq x_2$  (se figur 1). Identifikationen är singular längs linjen  $x_1 = x_2$ .



Figur 1: Det oskuggade halvplanet är konfigurationsrummet för två identiska partiklar som rör sig längs på en linje,  $\mathbb{R}^2/S_2$ .

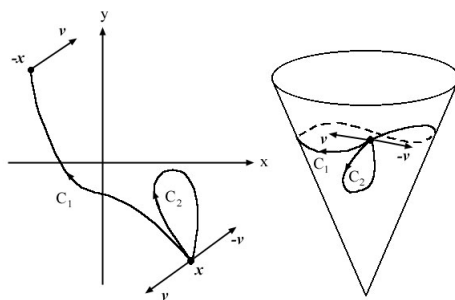
## 2.2 Identiska Partiklar i Planet

Konfigurationsrummet för två partiklar som rör sig i planet ( $\mathbb{R}^2$ ) blir  $\mathbb{R}^4/S_2 = \mathbb{R}^2 \times r(2, 2)$ . Det relativa rummet  $r(2, 2)$  är  $\mathbb{R}^2$  med punkter  $\mathbf{x}$  och  $-\mathbf{x}$  identifierade. Vi kan åskådliggöra detta rum om vi tänker oss att vi klipper längs linjen  $l$  i figur 2 och rullar ihop planet så att punkterna som skall identifieras hamnar på varandra. Vi får då en kon. En cirkel  $C$  kring origo i planet kommer att gå två varv kring konen.



Figur 2: Det relativa rummet  $r(2,2)$  för två identiska partiklar i planet med motsatta punkter  $\mathbf{x}$  och  $-\mathbf{x}$  identifierade. Identifikationen kan åstadkommas genom att klippa planet längs  $l$  och vika ihop det till en kon.

Konen är globalt krökt men lokalt plan överallt utom i den singulära punkten (spetsen på konen). Att rummet är krökt gör att paralleltransport av vektorer inte blir vad vi är vana vid. För att se detta tittar vi på planet igen, paralleltransport av vektorer blir nu den vi är vana vid men p.g.a. identifikationen kommer en vektor  $\mathbf{v}$  i punkten  $\mathbf{x}$  att vara associerad med en vektor  $-\mathbf{v}$  i punkten  $-\mathbf{x}$ . Om vi nu paralleltransporterar vektorn  $\mathbf{v}$  från  $\mathbf{x}$  till  $-\mathbf{x}$  och sedan ”rullar ihop” planet till en kon ser vi att vi paralleltransporterat  $\mathbf{v}$  ett varv kring konen. När vi kommit tillbaka till startpunkten har vi dock fått vektorn  $-\mathbf{v}$ . Figur 3 försöker åskådliggöra detta.



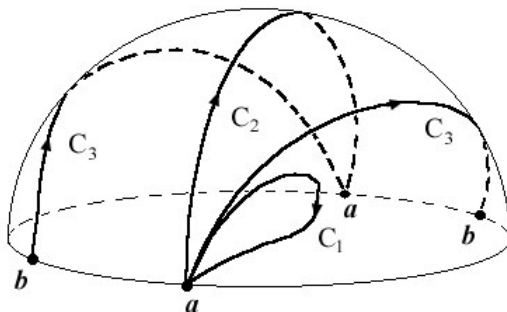
Figur 3: Paralleltransport av vektorn  $\mathbf{v}$  kring två olika slutna kurvor  $C_1$  och  $C_2$  i det relativa rummet  $r(2,2)$  som representeras av konen. Om konen avbildas på planet blir  $C_2$  en sluten kurva i planet som alltså lämnar  $\mathbf{v}$  oförändrad.  $C_1$  går från  $\mathbf{x}$  till  $-\mathbf{x}$ , och eftersom vektorn  $\mathbf{v}$  i punkten  $\mathbf{x}$  genom identifikationen blir densamma som vektorn  $-\mathbf{v}$  i punkten  $-\mathbf{x}$ , kommer paralleltransport ett varv längs  $C_1$  att ändra  $\mathbf{v}$  till  $-\mathbf{v}$ .

Paralleltransporterar vi ett varv till (tillbaka till  $\mathbf{x}$  i planet) får vi tillbaka vår ursprungliga vektor  $\mathbf{v}$ . Paralleltransport längs en sluten kurva i  $r(2,2)$  ändrar alltså  $\mathbf{v}$  till  $(-1)^m \mathbf{v}$  där  $m$  är antalet varv runt konen som kurvan gör. Detta visar sig gälla mer allmänt. För  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$  visar det sig att det finns två

klasser av likvärdiga slutna kurvor med avseende på parallelltransport av vektorer i  $r(n,2)$ . Den ena klassen lämnar  $\mathbf{v}$  oförändrad medan den andra ändrar  $\mathbf{v}$  till  $-\mathbf{v}$ . Den första klassen sammanbinder punkten  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$  kontinuerligt med sig själv och den andra klassen sammanbinder  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  med  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ .

### 2.3 Identiska Partiklar i Rummet

Det fysikaliskt mest intressanta fallet är förstås  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^3$ . För att illustrera  $r(3,2)$  noterar vi att  $\mathbb{P}_2$ , det projektiva rummet, är ytan av enhetssfären med (diаметralt) motsatta punkter identifierade. Eller ekvivalent det norra halvklotet med motstående punkter på ekvatorn identifierade (se figur 4).

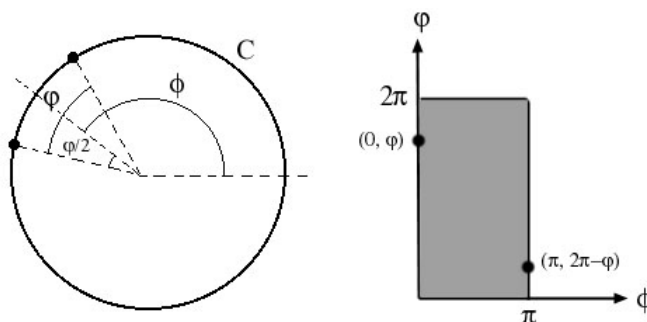


Figur 4: Det projektiva rummet  $\mathbb{P}_2$  illustrerat som det norra halvklotet av enhetssfären med motstående punkter på ekvatorn identifierade.  $C_1$ ,  $C_2$  och  $C_3$  är slutna kurvor.  $C_1$  kan deformerats till en punkt,  $C_2$  kan inte deformerats till en punkt. Eftersom detta rum är dubbelt sammansatt kan dock  $C_2^2$ , d.v.s.  $C_2$  genomlöp två gånger, deformerats till en punkt.  $C_3$  skulle kunna vara ett steg på vägen i deformationen av  $C_2^2$  till en punkt.

I  $r(3,2) - \{0\} = ]0, \infty[ \times \mathbb{P}_2$  ändras en vektor  $\mathbf{v}$  till  $-\mathbf{v}$  om den parallelltransporteras längs någon kontinuerlig sluten kurva i  $\mathbb{P}_2$  som sammanbinder motsatta punkter på sfären. Analogt med det tvådimensionella fallet säger vi att en sådan kurva går ett varv kring singulariteten  $\mathbf{x} = 0$ . En kurva som går ett varv kring singulariteten kan inte kontinuerligt deformerats till en punkt utan att passera genom singulariteten. Detta är dock, till skillnad från i det tvådimensionella fallet, möjligt med en kurva som går två varv kring singulariteten. Det är lätt att se att t.ex.  $C_2^2$  i figuren, d.v.s. kurvan  $C_2$  genomlöp två gånger, kan deformerats kontinuerligt till en punkt. Vi säger att det relativa rummet i tre dimensioner är dubbelt sammanhängande eftersom kurvor som går två varv kring singulariteten kan deformerats till en punkt medan kurvor som går ett varv kring singulariteten inte kan deformerats till en punkt utan att passera singulariteten. I det tvådimensionella fallet är det relativa rummet istället oändligt sammanhängande eftersom inga slutna kurvor kring singulariteten kan deformerats till en punkt utan att passera konens spets.

## 2.4 Identiska Partiklar på en Cirkel

Rummet  $\mathbb{R}^n$  är speciellt på så sätt att "masscentrumrummet" går att bryta ut. För att ta ett annorlunda exempel kan vi betrakta två partiklar som rör sig på periferin av en cirkel  $C$ . Om partiklarna inte är identiska är konfigurationsrummet en torus,  $C^2$ , med båda radierna desamma som  $C$ . Om partiklarna istället är identiska blir konfigurationsrummet ett Möbiusband! För att se detta inför vi masscentrumvinkeln  $\phi$  och den relativa vinkeln  $\varphi$ , se figur 5.



Figur 5: Två identiska partiklar på en cirkel. Rektangeln till höger representerar alla möjliga konfigurationer och randpunkterna  $(0, \varphi)$  och  $(\pi, 2\pi - \varphi)$  representerar samma konfiguration. Görts denna identifikation blir rektangeln ett Möbiusband.

Rektangeln  $0 \leq \phi \leq \pi$  och  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  i  $(\phi, \varphi)$ -planet innehåller alla möjliga konfigurationer. Alla punkter i rektangeln representerar olika konfigurationer förutom vänster- och högerkanten där  $(0, \varphi)$  och  $(\pi, 2\pi - \varphi)$  båda representerar samma konfiguration. Om man gör denna identifiering (genom att t.ex. klippa ut rektangeln och vika den så att dessa punkter sammanfaller) blir rektangeln ett Möbiusband.

## 3 Kvantisering

Vi ska nu se hur vår behandling av konfigurationsrummet i förra avsnittet kan tillämpas på kvantfysiken. För det första behöver vi inte längre införa några symmetrikrav på vågfunktionen eftersom godtyckligheten i notationen är avlägsnad. Detta verkar önskvärt. Vi slipper problem som varför elektroner på stort avstånd ifrån varandra (t.ex. i olika galaxer) skulle vara korrelerade genom att deras vågfunktion ska ha en viss symmetri. Däremot finns det inget självklart sätt att kvantisera en teori med ett krökt konfigurationsrum som till och med har singulariteter. Vi ska här försöka visa på vad som verkar vara det enklaste sättet, utan att införa onödiga restriktioner på teorin. Problemet är att definiera en Hamiltonoperator som tar hand om de fysikaliska effekterna av singulariteterna på ett riktigt sätt. Vi betraktar i tur och ordning rummen  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  och  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.1 Identiska Partiklar på en Linje

I en dimension är singularitetens natur något annorlunda än i två och tre dimensioner. Konfigurationsrummet för två partiklar i en dimension är halvplanet i figur 1, avsnitt 2, och singulariteten är begränsningslinjen  $x_1 = x_2$ . Det är därför naturligt att anta den vanliga Hamiltonoperatoren för två fria partiklar på en linje och beskriva effekten av singulariteten som ett randvärdesproblem. Uttryckt i masscentrumkoordinaten  $x = (x_1 + x_2)/2$  och den relativa koordinaten  $z = x_1 - x_2 \geq 0$  får vi

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2)$$

där  $m$  är partiklarnas massa.

När man i normala fall har en partikel som endast kan röra sig inom ett begränsat område kräver man att vågfunktionen är noll på områdets rand. Detta krav svarar i vårt fall mot att partiklarna är fermioner och är uppenbarligen ett för starkt krav för oss. Ett rimligare krav är att begära lokalt bevarande av sannolikhet på randen av konfigurationsrummet. Detta innebär att vi kräver att den normala komponenten av sannolikhetsströmmen försvinner i alla punkter på randen, d.v.s. att ingen sannolikhet "flyter ut" ur konfigurationsrummet, så att

$$j_{\perp}(x, 0) = \psi^*(x, 0) \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, 0) - \psi(x, 0) \frac{\partial \psi^*}{\partial z}(x, 0) = 0 \quad (3)$$

för alla  $x$  och vågfunktioner  $\psi(x, z)$ . Detta krav på vågfunktionen är tillräckligt för att sannolikheten skall vara globalt bevarad och för att Hamiltonoperatoren i (2) skall vara hermitisk. Vi löser (3) genom att skriva om den som

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(x, 0)/\psi(x, 0) = \frac{\partial \psi^*}{\partial z}(x, 0)/\psi^*(x, 0) = \eta \in \mathbb{R}$$

eller

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(x, 0) = \eta \psi(x, 0) \quad (4)$$

där  $\eta$  alltså är en reell parameter. Till följd av superpositionsprincipen har vi om  $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n$  att

$$\eta \psi(x, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}(x, 0) + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial z}(x, 0) = \eta_1 \psi_1(x, 0) + \dots + \eta_n \psi_n(x, 0)$$

för alla  $x$ . Detta medför att  $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n = \eta$ . Alltså är värdet på  $\eta$  oberoende av  $\psi$  och därför karakteristiskt för systemet i fråga. Av translationssymmetrin följer att  $\eta$  inte heller kan bero av  $x$  (masscentrums läge). Vi observerar att det inte är möjligt att superponera vågfunktioner svarande mot olika  $\eta$ -värden.

Värdet på  $\eta$  beskriver systemets flerpartikelnatur. Ett bosonsystem har  $\eta = 0$  medan  $\frac{1}{\eta} = 0$  svarar mot ett fermionsystem. Men alla mellanliggande värden på

$\eta$  är också möjliga och svarar mot system som varken är boson- eller fermion-system!

Vi fortsätter nu med att lösa den tidsberoende Schrödingerekvationen för Hamiltonoperatoren (2) med vårt randvillkor (4). För att göra detta använder vi oss av det klassiska knepet att separera variabler och skriver

$$\psi(x, z) = X(x) \cdot Z(z)$$

Sätter vi in detta i Schrödingerekvationen och dividerar med  $\psi$  får vi

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = E$$

eller

$$-\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{4}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{4mE}{\hbar^2} \quad (5)$$

I denna ekvation beror högerledet bara av  $z$  och vänsterledet bara av  $x$ , de måste därför vara lika med en konstant. Energin associerad med masscentrums rörelse är positiv eftersom vi betraktar fria partiklar och alltså måste även vår separationskonstant vara det. Vi kan då välja att skriva den som  $k^2$  där  $k \in \mathbb{R}$  och får då ekvationerna

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \left(\frac{mE}{\hbar^2} - \frac{k^2}{4}\right) Z = 0 \quad (7)$$

Vi behandlar först fallet  $|k| \leq 2\sqrt{mE}/\hbar$ . De allmänna lösningarna blir i detta fall

$$X = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} \quad (8)$$

$$Z = C_3 e^{ik'z} + C_4 e^{-ik'z} = C_5 \cos(k'z) + C_6 \sin(k'z) \quad (9)$$

där  $k' = \sqrt{\frac{mE}{\hbar^2} - \frac{k^2}{4}}$  och  $C_n$  är komplexa konstanter. Randvillkoret (4) ger nu

$$C_6 \cdot k' \cdot (C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}) = \eta \cdot C_5 \cdot (C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}) \Rightarrow C_6 = \frac{\eta}{k'} \cdot C_5$$

Vi kan alltså skriva lösningen då  $|k| \leq 2\sqrt{mE}/\hbar$  som

$$\psi_1(x, z) = X \cdot Z = A \cdot e^{ikx} \cdot \left(\cos(k'z) + \frac{\eta}{k'} \sin(k'z)\right) \quad (10)$$

där  $A$  är en normaliseringskonstant. Den del av vågfunktionen som beskriver den relativa rörelsen är i detta fall en reell stående våg.

Nu återstår att titta på fallet  $|k| \geq 2\sqrt{mE}/\hbar$ . Masscentrumdelen blir densamma men den relativa delen har nu istället för (9) lösningen

$$Z = C_7 e^{k''z} + C_8 e^{-k''z} \quad (11)$$

där  $k'' = \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{mE}{\hbar^2}}$ . För att  $\psi$  ska gå mot noll då  $z$  går mot oändligheten måste vi ha  $C_7 = 0$ . Randvillkoret (4) ger oss nu

$$-k'' \cdot C_8 \cdot (C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}) = \eta \cdot C_8 \cdot (C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}) \Rightarrow k'' = -\eta$$

och vi får

$$\psi_2(x, z) = X \cdot Z = B \cdot e^{ikx} \cdot e^{\eta z} \quad (12)$$

där  $B$  är en normaliseringskonstant. Vi ser att detta endast är en giltig lösning om  $\eta < 0$ . Denna lösning har samma form som lösningen till ("den vanliga") Schrödingerekvationen utan randvillkoret (4) men med en potential  $V(x_1 - x_2) = -\delta(x_1 - x_2)$ , d.v.s. en attraktiv potential mellan partiklarna med oändligt kort räckvidd.

De båda lösningarna  $\psi_1$  och  $\psi_2$  representerar ett system av två partiklar som (för allmänna  $\eta$ -värden) varken är fermioner eller bosoner utan anyoner (efter engelskans any-statistics)!

### 3.2 Identiska Partiklar i Planet

När vi går över från en till två dimensioner är konfigurationsrummet inte längre plant även om singulariteterna utesluts. Närvaron av singulariteter avslöjas genom en global krökning av konfigurationsrummet som vi studerade i avsnitt 2 genom att titta på parallelltransport av vektorer. För att se singulariteternas betydelse i den kvantmekaniska beskrivningen introducerar vi på ett liknande sätt parallelltransport av tillståndsvektorer.

Till att börja med introducerar vi för varje punkt  $\mathbf{x}$  i konfigurationsrummet ett endimensionellt Hilbertrum,  $h_{\mathbf{x}}$  (en "fiber" på matematiska). Istället för en tillståndsvektor i ett oändligtdimensionellt Hilbertrum låter vi systemet beskrivas av ett kontinuum av tillståndsvektorer  $\Psi(\mathbf{x}) \in h_{\mathbf{x}}$ , en för varje punkt i konfigurationsrummet.  $\Psi$  är alltså en enkelvärd funktion definierad på konfigurationsrummet vars funktionsvärde  $\Psi(\mathbf{x})$  i punkten  $\mathbf{x}$  är en vektor i  $h_{\mathbf{x}}$ . Detta är inte fullt så exotiskt som det låter. Istället för att systemet beskrivs av en tillståndsvektor som har en komponent (ett komplext tal) för varje punkt i konfigurationsrummet, beskriver vi systemet med en tillståndsvektor för varje punkt  $\mathbf{x}$  i konfigurationsrummet, dessa vektorer har dock endast en komponent (ett komplext tal) var. I båda fallen beskriver vi alltså systemet med ett komplext tal (amplituden) för varje punkt i konfigurationsrummet. Den nya beskrivningen av systemet med en tillståndsvektor för varje  $\mathbf{x}$  ger oss dock möjlighet att ha ett krökt konfigurationsrum.

Om vi introducerar en normerad basvektor  $\chi_{\mathbf{x}}$  i varje rum  $h_{\mathbf{x}}$  blir den vanliga komplexa vågfunktionen  $\psi(\mathbf{x})$  bara koordinaten av vektorn  $\Psi(\mathbf{x})$  relativt den basen:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{x}} \quad (13)$$

Eller  $\psi(\mathbf{x}) = (\chi_{\mathbf{x}}|\Psi(\mathbf{x}))$ , där  $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$  betyder den inre (skalära) produkten av vektorerna  $\mathbf{A}$  och  $\mathbf{B}$ . Detta är precis analogt med vad man har i fallet med ett oändligtdimensionellt Hilbertrum,  $\psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\Psi)$  eller  $\psi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}|\Psi \rangle$  med Diracs notation. Vågfunktionen  $\psi(\mathbf{x})$  kommer därför att bero på uppsättningen basvektorer, eller gauget,  $\{\chi_{\mathbf{x}}\}$ . En ändring i uppsättningen basvektorer kommer att orsaka en lokal gaugetransformation <sup>4</sup>

$$\psi(\mathbf{x}) \mapsto \psi'(\mathbf{x}) = e^{i\varphi(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x}) \quad (14)$$

<sup>4</sup>Transformationen kallas lokal om  $\psi(\mathbf{x})$  multipliceras med en fasfaktor  $e^{i\varphi(\mathbf{x})}$  som varierar i rummet, d.v.s. om  $\varphi(\mathbf{x})$  ej är konstant. Ett annat namn är gaugetransformation av andra slaget.

Detta eftersom vektorerna  $\Psi(\mathbf{x})$  inte beror på basen (detta är ju kännetecknet för vektorer) och eftersom den enda transformation av basvektorerna som bevarar normaliseringen är multiplikation med en fasfaktor (som dock kan bero av  $\mathbf{x}$ ),  $\chi_{\mathbf{x}} \mapsto \chi'_{\mathbf{x}} = e^{-i\varphi(\mathbf{x})}\chi_{\mathbf{x}}$ . Eftersom tillståndsvektorerna  $\Psi(\mathbf{x})$  inte beror på uppsättningen basvektorer  $\{\chi_{\mathbf{x}}\}$  vi väljer (vektorerna  $\Psi(\mathbf{x})$  är gaugeinvarianta), och eftersom de antas beskriva systemet fullständigt, kan inga fysikaliskt mätbara storheter heller bero på uppsättningen basvektorer. Eftersom en mätbar storhet, säg  $A$ , i kvantfysiken representeras av en (Hermitisk) operator,  $\hat{A}$ , som opererar på vågfunktionen  $\psi(\mathbf{x})$  måste, om  $\psi(\mathbf{x})$  är en egenfunktion till  $\hat{A}$  med egenvärde  $a$ , mätvärdet  $a = \int \psi^*(\mathbf{x})\hat{A}\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$  vara oberoende av uppsättningen basvektorer  $\{\chi_{\mathbf{x}}\}$ , d.v.s.  $\int \psi'^*(\mathbf{x})\hat{A}\psi'(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int \psi^*(\mathbf{x})\hat{A}\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = a$  där  $\psi'(\mathbf{x})$  är resultatet av gauge transformationen (14). Detta villkor är uppenbarligen uppfyllt för lägesoperatoren  $\hat{x} = \mathbf{x}$  eftersom

$$\psi'^*(\mathbf{x})\hat{x}\psi'(\mathbf{x}) = e^{-i\varphi(\mathbf{x})}\psi^*(\mathbf{x})\mathbf{x}e^{i\varphi(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x}) = \psi^*(\mathbf{x})\mathbf{x}\psi(\mathbf{x}) = \psi^*(\mathbf{x})\hat{x}\psi(\mathbf{x})$$

Däremot är villkoret inte uppfyllt för rörelsemängdsoperatoren  $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$  eftersom

$$\begin{aligned} \psi'^*(\mathbf{x})\hat{p}\psi'(\mathbf{x}) &= e^{-i\varphi(\mathbf{x})}\psi^*(\mathbf{x})\frac{\hbar}{i}\nabla e^{i\varphi(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x}) = \\ &= e^{-i\varphi(\mathbf{x})}\psi^*(\mathbf{x})\frac{\hbar}{i}(\psi(\mathbf{x})\nabla e^{i\varphi(\mathbf{x})} + e^{i\varphi(\mathbf{x})}\nabla\psi(\mathbf{x})) = \\ &= \psi^*(\mathbf{x})\frac{\hbar}{i}\nabla\psi(\mathbf{x}) + \hbar\nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \psi^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = \\ &= \psi^*(\mathbf{x})\hat{p}\psi(\mathbf{x}) + \hbar\nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot |\psi(\mathbf{x})|^2 \neq \psi^*(\mathbf{x})\hat{p}\psi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

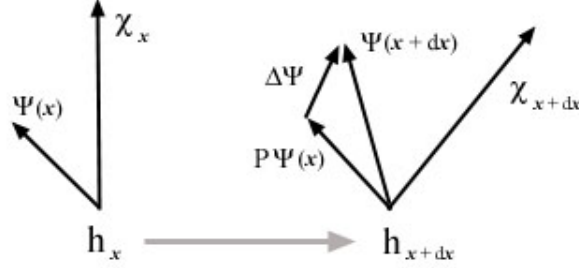
såvida  $\varphi(\mathbf{x})$  inte är en konstant. Om vi vill hålla fast vid vår idé om gaugeinvarians (vilket vi naturligtvis vill) måste vi därför bl.a. definiera om vår rörelsemängdsoperator  $\hat{p}$ , men hur? Problemet med vår rörelsemängdsoperator är att den innehåller en derivata med avseende på läget som inte är gaugeinvariant eftersom fasen  $\varphi$  är en funktion av just läget. Det naturligaste sättet att lösa detta problem är att försöka finna en gaugeinvariant derivata av vågfunktionen  $\psi(\mathbf{x})$  och stoppa in denna derivata istället för  $\nabla$  i uttrycken för våra operatörer, såsom  $\hat{p}$ .

För att kunna definiera en gaugeinvariant derivata introducerar vi begreppet parallelltransport av vektorer från  $h_{\mathbf{x}}$ . Vi låter  $P(\mathbf{x}', \mathbf{x}) : h_{\mathbf{x}} \mapsto h_{\mathbf{x}'}$  beteckna den linjära operator som parallelltransporterar vektorer från  $h_{\mathbf{x}}$  till  $h_{\mathbf{x}'}$  längs någon kontinuerlig kurva från  $\mathbf{x}$  till  $\mathbf{x}'$ . I allmänhet kan parallelltransporten bero på kurvan från  $\mathbf{x}$  till  $\mathbf{x}'$ , men vi antar att den infinitesimala parallelltransporten  $P(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, \mathbf{x})$  från  $\mathbf{x}$  till  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  är unikt definierad. Till sist antar vi att vi, i alla fall lokalt, kan välja gaugen  $\{\chi_{\mathbf{x}}\}$  så att lagen för infinitesimal parallelltransport blir

$$P(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, \mathbf{x})\chi_{\mathbf{x}} = (1 + idx^k b_k(\mathbf{x}))\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}} \quad (15)$$

där summering över  $k$  är underförstådd. Innebörden av detta är att basvektorn i punkten  $\mathbf{x}$ ,  $\chi_{\mathbf{x}}$ , parallelltransporterad från  $\mathbf{x}$  till  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  fås ur basvektorn i punkten  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ ,  $\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}$ , genom en infinitesimal rotation. Vad vi antagit är alltså att vi kan välja gaugen  $\{\chi_{\mathbf{x}}\}$  så att basvektorerna ändras kontinuerligt från punkt till punkt.

Väljer vi gaugen så att (15) är uppfylld kan vi med hjälp av infinitesimal parallelltransport definiera en gaugeinvariant derivata. Vi tittar på hur tillståndsvektorerna  $\Psi(\mathbf{x})$  ändras vid parallelltransport från  $\mathbf{x}$  till  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  och skriver ändringen som  $\Delta\Psi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - P(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, \mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) \in h_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}$ . Detta är illustrerat i figur 6.



Figur 6: Den gaugeinvarianta ändringen,  $\Delta\Psi$ , av  $\Psi$  då vi går från  $\mathbf{x}$  till  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  definierad med hjälp av parallelltransport.

Vi definierar nu den gaugeinvarianta derivationsoperatoren,  $\mathbf{D}$ , så att

$$\Delta\Psi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = dx^k D_k \psi(\mathbf{x}) \cdot \chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}} \quad (16)$$

(summering över  $k$  är underförstådd). Vi kan se att denna derivata verkligen blir gaugeinvariant genom att först ta skalärprodukten av båda led med  $\psi^*(\mathbf{x} + d\mathbf{x})\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}$  och sedan göra en gaugetransformation. Vi får då genom att utnyttja (16) och (14)

$$\begin{aligned} (\psi^*(\mathbf{x} + d\mathbf{x})dx^k D_k \psi(\mathbf{x}))' &= \psi'^*(\mathbf{x} + d\mathbf{x})(\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}|\Delta\Psi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}))' = \\ &= (e^{i\varphi(\mathbf{x}+d\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}))^*(e^{-i\varphi(\mathbf{x}+d\mathbf{x})}\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}|\Delta\Psi(\mathbf{x} + d\mathbf{x})) = \\ &= e^{-i\varphi(\mathbf{x}+d\mathbf{x})}\psi^*(\mathbf{x} + d\mathbf{x})e^{i\varphi(\mathbf{x}+d\mathbf{x})}(\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}|\Delta\Psi(\mathbf{x} + d\mathbf{x})) = \\ &= \psi^*(\mathbf{x} + d\mathbf{x})(\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}|\Delta\Psi(\mathbf{x} + d\mathbf{x})) = \\ &= \psi^*(\mathbf{x} + d\mathbf{x})dx^k D_k \psi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (17)$$

Dessutom har vi att

$$\begin{aligned} dx^k D_k \psi(\mathbf{x}) &= (\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}|\Delta\Psi(\mathbf{x}+d\mathbf{x})) = (\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}|\Psi(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - P(\mathbf{x}+d\mathbf{x}, \mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})) = \\ &= (\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}|\psi(\mathbf{x} + d\mathbf{x})\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}} - \psi(\mathbf{x})P(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, \mathbf{x})\chi_{\mathbf{x}}) = \\ &= (\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}|(\psi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})(1 + idx^k b_k(\mathbf{x})))\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}) = \\ &= \left( \psi(\mathbf{x}) + dx^k \frac{\partial\psi}{\partial x^k}(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) - idx^k b_k(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \right) (\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}|\chi_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}}) = \\ &= dx^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} - ib_k(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

så att

$$\mathbf{D} = \nabla - i\mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (18)$$

är vår gaugeinvarianta derivationsoperator.

Funktionerna  $b_k$  bestäms dels av systemets dynamik och dels av vårt val av gauge  $\{\chi_{\mathbf{x}}\}$ . De måste vara reella för att  $P(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$  ska bli unitär, d.v.s. så att  $|P\Psi| = |\Psi|$ . Den gaugeinvarianta funktionen

$$f_{kl} = i[D_k, D_l] = \frac{\partial b_l}{\partial x^k} - \frac{\partial b_k}{\partial x^l} \quad (19)$$

, d.v.s. kommutatorn mellan de olika komponenterna av  $\mathbf{D}$ , svarar i fallet med parallelltransport mot krökningstensorn. Det finns stora likheter mellan den gaugeinvarianta derivationsoperatoren (18) och den derivationsoperator som dyker upp i Hamiltonoperatoren för en laddad partikel i ett magnetfält:

$$\nabla - i\frac{q}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (20)$$

I det fallet svarar  $f_{kl}$  mot fältstyrketensorn och  $\mathbf{b}$  mot vektorpotentialen  $\mathbf{A}$ . Vi ser alltså att vårt krav på lokal gaugeinvarians tvingar oss att införa en "vektorpotential",  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ , med tillhörande kraftfält. I vårt fall vill vi dock inte att "vektorpotentialen"  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  ska beskriva ett kraftfält. Vi antar därför att  $f_{kl}(\mathbf{x}) = 0$  för alla  $\mathbf{x}$  utom i de singulära punkterna, där  $f_{kl}$  är odefinierad. Detta innebär att kurvintegralen  $\int_{\gamma} \mathbf{D}\psi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$  blir oberoende av vägen i varje enkelt sammanhängande område i konfigurationsrummet ( $\mathbf{D}\psi(\mathbf{x})$  är en så kallad potentialfunktion). Speciellt är då  $\oint \mathbf{D}\psi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0$  och eftersom  $\psi^{(\gamma)}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) + \oint \mathbf{D}\psi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \psi(\mathbf{x})$  blir  $\psi$  entydigt definierad i området i fråga och eftersom basen  $\{\chi_{\mathbf{x}}\}$  är entydigt vald från början blir parallelltransport av tillståndsvektorerna  $\Psi(\mathbf{x})$  oberoende av vägen. Vektorerna  $\Psi$  förblir alltså oförändrade vid parallelltransport runt slutna kurvor som ej innesluter någon singularitet. Om kurvan innesluter en singularitet kommer  $\Psi(\mathbf{x})$  att ändras till  $P_{\mathbf{x}}\Psi(\mathbf{x})$  vid parallelltransport ett varv runt singulariteten, där  $P_{\mathbf{x}}$  är en linjär, unitär operator som verkar i  $h_{\mathbf{x}}$ . Eftersom detta är ett endimensionellt Hilbertrum är  $P_{\mathbf{x}}$  bara en fasfaktor

$$P_{\mathbf{x}}\Psi(\mathbf{x}) = e^{i\xi}\Psi(\mathbf{x}) \quad (21)$$

där  $\xi \in \mathbb{R}$ . Eftersom

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{x}'}\Psi(\mathbf{x}') &= P(\mathbf{x}', \mathbf{x})P_{\mathbf{x}}P^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}') = P(\mathbf{x}', \mathbf{x})P_{\mathbf{x}}\Psi(\mathbf{x}) = \\ &= P(\mathbf{x}', \mathbf{x})e^{i\xi}\Psi(\mathbf{x}) = e^{i\xi}\Psi(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (22)$$

beror inte parametern  $\xi$  på punkten  $\mathbf{x}$  och den är därför karakteristisk för det givna tvåpartikelsystemet.

Fältet  $\mathbf{b}$  har en dynamisk effekt genom den gaugeinvarianta derivationsoperatoren  $\mathbf{D}$ . Det visar sig dock att  $\mathbf{b}$  kan transformeras till noll genom att basvektorerna  $\chi_{\mathbf{x}}$  väljs på ett speciellt sätt. Om vi utgår från en basvektor  $\chi_{\mathbf{x}}$  i en godtycklig punkt och låter basvektorerna i alla andra punkter vara denna vektor parallelltransporterad till punkten i fråga blir  $\mathbf{b} = 0$  (förutsatt att  $f_{kl} = 0$ ). Å andra sidan kommer, om  $e^{i\xi} \neq 1$ , den komplexa vågfunktionen  $\psi(\mathbf{x})$  bli flervärd i denna gauge. Detta beror på att basen blir flervärd eftersom vektorerna  $\chi_{\mathbf{x}}, e^{\pm i\xi}\chi_{\mathbf{x}}, e^{\pm 2i\xi}\chi_{\mathbf{x}}, \dots \in h_{\mathbf{x}}$  alla genereras genom parallelltransport av

$\chi_{\mathbf{x}}$  längs slutna kurvor olika många varv kring singulariteten. På detta sätt kan alltså effekten av singulariteterna överföras från derivationsoperatoren, och därmed från Hamiltonoperatoren, till vågfunktionen  $\psi$ , genom att denna blir flervärd.

Vi tittar nu specifikt på det tvådimensionella fallet och illustrerar de två olika sätten att tolka vågfunktionen. Vi nöjer oss med att titta på den relativa delen av koordinaterna. Vi inför polära koordinater  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  och  $\varphi = \arctan\left(\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)_y}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)_x}\right) \in [0, 2\pi[$ . Hamiltonoperatoren blir i fallet med fria partiklar

$$H = -\frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad (23)$$

då vågfunktionen uppfyller

$$\psi(r, \varphi + 2\pi) = e^{i\xi} \psi(r, \varphi)$$

Parametern  $\xi$  beskriver systemets flerpartikelnatur. För ett bosonsystem är  $\xi = 0$  och för ett fermionsystem är  $\xi = \pi$ . Det finns dock ingen anledning att begränsa  $\xi$  till endast dessa två värden. Liksom i fallet med en dimension ser vi att ett kontinuum av tillstånd är möjliga mellan boson- och fermionfallen.

Vår andra möjlighet är att definiera den enkelvärda vågfunktionen

$$\psi'(r, \varphi) = e^{-i\frac{\xi}{2\pi}\varphi} \psi(r, \varphi) \quad (24)$$

och istället använda den transformerade Hamiltonoperatoren

$$\begin{aligned} H' &= e^{-i\frac{\xi}{2\pi}\varphi} H e^{i\frac{\xi}{2\pi}\varphi} = -\frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e^{-i\frac{\xi}{2\pi}\varphi}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} e^{i\frac{\xi}{2\pi}\varphi} \right) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + i\frac{\xi}{2\pi} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (25)$$

För att se de fysikaliska effekterna av parametern  $\xi$  låter vi partiklarna växelverka via en harmonisk oscillator potential

$$V(r) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 = \frac{1}{4} m \omega^2 r^2 \quad (26)$$

där  $\mu$  är den reducerade massan. I Schrödingerekvationen för Hamiltonoperatoren  $H' + V$  kan vi separera variabler och skriva  $\psi'(r, \varphi) = \Phi(\varphi)R(r)$ . För vinkelberoendet får vi ekvationen

$$\frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{d}{d\varphi} + i\frac{\xi}{2\pi} \right)^2 \Phi = -k^2 \Phi \quad (27)$$

där  $-k^2$  är separationskonstanten, som är negativ eftersom vi är intresserade av bundna tillstånd. Lösningen kan skrivas som

$$\Phi(\varphi) = e^{il\varphi} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (28)$$

$l$  är begränsad till heltal för att funktionen inte ska bli flervärd.

Sätter vi in vårt  $\Phi$  blir ekvationen för den radiella delen,  $R(r)$ ,

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{A^2}{r^2} - B^2 r^2 + C \right) R(r) = 0 \quad (29)$$

där vi infört de nya beteckningarna

$$A = \left| l + \frac{\xi}{2\pi} \right| \quad B = \frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} \quad C = \frac{mE}{\hbar^2}$$

Denna ekvation är inte lika enkel att lösa. Den måste först förenklas. Om man tittar på det asymptotiska beteendet hos lösningen kan man se att då  $r \ll 1$  blir ekvationen ungefär

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{A^2}{r^2} \right) R_0(r) = 0$$

med lösningen  $R_0(r) = r^A$ . Om vi låter  $r \gg 1$  blir ekvationen istället ungefär

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - B^2 r^2 \right) R_\infty(r) = 0$$

som har den approximativa lösningen  $R_\infty(r) = e^{-Br^2/2}$ . Vi försöker nu att lösa vår ursprungliga ekvation genom att ansätta en lösning på formen  $R(r) = r^A e^{-Br^2/2} S(r)$ . Sätter vi in detta i (29) får vi efter en del räknande

$$\left( 2 \frac{d^2}{dr^2} + \left( \frac{2A+1}{r} - 2Br \right) \frac{d}{dr} + C - 2B(A+1) \right) S(r) = 0 \quad (30)$$

Nu börjar det likna något. Vi antar en potensserie,  $S(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ , för att försöka lösa ekvationen. Vi får

$$(2A+1)a_1 \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( 2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (2A+1)(n+2)a_{n+2} - 2B \cdot n \cdot a_n + (C - 2B(A+1))a_n \right) r^n = 0$$

För att detta skall vara uppfyllt måste alla termer i summan vara noll och vi får

$$(2A+1)a_1 = 0 \quad a_{n+2} = \frac{2B(n+A+1) - C}{(n+2)(2(n+A+1)+1)} a_n$$

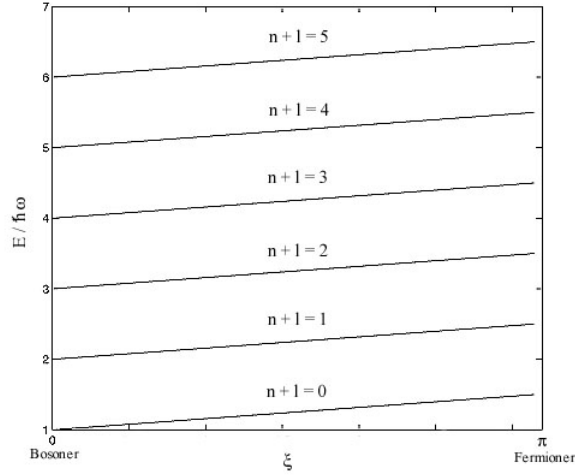
För att  $R(r)$  ska gå mot noll då  $r$  går mot oändligheten måste denna serie ta slut för något ändligt  $n$ . Kravet blir

$$2B(n+A+1) - C = 0$$

eller om vi återgår till de ursprungliga variablerna

$$E = \hbar\omega \left( n + \left| l + \frac{\xi}{2\pi} \right| + 1 \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

Vi har alltså fått ut systemets möjliga energier. Värdet på  $\xi$  påverkar systemets energinivåer. Figur 7 visar energinivåerna för alla olika värden på  $\xi$  från bosonfallet  $\xi = 0$  till fermionfallet  $\xi = \pi$ . Möjligheten att ha vilket värde som helst på  $\xi$  gör att alla energier mellan fermion- och bosonenerginivåerna också är möjliga.



Figur 7: Energispektrum för ett tvåpartikelsystem som växelverkar med en harmonisk oscillator potential i två dimensioner. Energin visas som funktion av parametern  $\xi$ . Den kontinuerliga övergången mellan boson- och fermionspektrum framgår tydligt.

### 3.3 Identiska Partiklar i Rummet

Vi tittar nu slutligen på det tredimensionella fallet. Som vi såg i avsnitt 2 kan en sluten kurva som rundar singulariteten två gånger kontinuerligt deformeras till en punkt utan att passera genom singulariteten. Detta betyder att om vi parallelltransporterar  $\Psi$  två varv kring singulariteten måste vi få tillbaka vårt ursprungliga  $\Psi$ , d.v.s.

$$P_{\mathbf{x}}^2 = 1 \quad (32)$$

Så att  $P_{\mathbf{x}} = \pm 1$  och endast de två värdena  $\xi = 0$  och  $\xi = \pi$  är möjliga. Om vi definierar vår uppsättning basvektorer  $\{\chi_{\mathbf{x}}\}$  genom parallelltransport blir  $\chi_{\mathbf{x}}$ , och därför även  $\psi(\mathbf{x})$ , enkelvärda då  $\xi = 0$  och dubbelvärda då  $\xi = \pi$ .

Det sista steget för att övergå till den traditionella formalismen är att ändra vågfunktionen så att den blir definierad på  $(\mathbb{R}^3)^2$  istället för på  $(\mathbb{R}^3)^2/S_2$ . Om vi tar en godtycklig punkt  $\mathbf{x}$  i  $(\mathbb{R}^3)^2/S_2$  och basvektorn i denna punkt  $\chi_{\mathbf{x}} \in h_{\mathbf{x}}$  och associerar denna med punkten  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  i  $(\mathbb{R}^3)^2$  kan vi parallelltransportera denna basvektor till alla andra punkter i  $(\mathbb{R}^3)^2$ . Detta eftersom varje kurva i  $(\mathbb{R}^3)^2$  svarar mot en unik kurva i  $(\mathbb{R}^3)^2/S_2$  där vi definierat parallelltransport av basvektorer. Basvektorn  $P_{\mathbf{x}}\chi_{\mathbf{x}}$ , som i  $(\mathbb{R}^3)^2/S_2$  befinner sig i punkten  $\mathbf{x}$ , kommer i  $(\mathbb{R}^3)^2$  istället att befinna sig i punkten  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$  som är helt skild från  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Uppsättningen basvektorer kommer därför att bli entydigt definierad i  $(\mathbb{R}^3)^2$  till skillnad från i  $(\mathbb{R}^3)^2/S_2$ . Alltså kommer den komplexa vågfunktionen att bli enkelvärd i  $(\mathbb{R}^3)^2$ .

Vågfunktionen i  $(\mathbb{R}^3)^2$  kommer istället att uppfylla villkoret

$$\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = e^{i\xi}\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \pm\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (33)$$

där  $\xi = 0$  svarar mot bosoner och  $\xi = \pi$  mot fermioner. Vi får alltså tillbaka vårt symmetripostulat, fast på naturlig väg, genom att konfigurationsrummet

$(\mathbb{R}^3)^2/S_2$  är dubbelt sammansatt.

## 4 Sammanfattning

Vi har sett hur man på ett naturligt sätt kan hantera icke-särskiljbarheten hos partiklar i kvantmekaniken genom att modifiera konfigurationsrummet. I tre dimensioner har vi sett att detta ger samma resultat som den traditionella metoden att införa symmetripostulatet

$$|\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)|^2 = |\psi(p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n))|^2 \quad (34)$$

I en och två dimensioner får man dock andra resultat. Det blir här möjligt med ett kontinuerligt spektrum av partiklar (eller kvasipartiklar) mellan boson- och fermionfallen, så kallade anyoner. Vad spelar det då för roll vad som är möjligt i en och två dimensioner när den fysiska världen ju är tredimensionell? Det visar sig att i kvantfysiken kan man faktiskt ha partiklar som rör sig i endast en eller två dimensioner. Som exempel har man i kvanthalleffekten elektroner som rör sig i gränsskiktet mellan två halvledare kylda till ytterst nära absoluta nollpunkten. Under dessa förhållanden visar det sig att elektronerna endast kommer kunna röra sig i ett plan.

I kvanthalleffekten skulle alltså anyoner kunna uppträda och det är precis vad man observerar i den fraktionella kvanthalleffekten. Där uppträder nämligen kvasipartiklar med kvanttal som inte är heltal och lite andra märkliga egenskaper.

I denna text har vi inte tittat på fler än två identiska partiklar och undvikit att behandla spinn. Dessa saker låter sig dock göras på ett rättframt sätt utan att introducera några nya begrepp.