

Tentamen i Statistisk Fysik 1 den tjugonde augusti 2008, under tiden 9.00-15.00. Lärare: Ingemar Bengtsson. Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Bedömning: 3 poäng/uppgift. Betyg: 0-3 = F, 4-6 = Fx, 6-9 = E, 10-12 = D, 13-14 = C, 15-16 = B, 17-18 = A.

---

1. Starting from the energy  $U = U(S,V)$ , use Legendre transformations to derive Helmholtz' free energy  $F$ , Gibbs' free energy  $G$ , and the enthalpy  $H$ . If you are a physicist studying boiling water, which potential do you choose, and why? If you are a chemist mixing some ingredients in a test tube, which potential do you choose, and why?
2. Maxwell's velocity distribution  $\mathcal{D}(v)$  for an ideal gas is proportional to (the probability that a molecule has the velocity vector  $\vec{v}$ ) times (the number of vectors  $\vec{v}$  that correspond to the velocity  $v$ ). Use this to derive the correct formula!
3. A harmonic oscillator has  $E = nh\nu$ . Compute its partition function and the expected number of quanta  $\bar{n}$  as a function of temperature. Use this to deduce Planck's expression for the energy density of a photon gas confined to a box.
4. Consider a collection of two state atoms in interaction with black body radiation of energy density  $u$ . There are  $N_1$  atoms in the ground state and  $N_2$  atoms in the excited state. Let  $A =$  (probability of spontaneous decay per unit time),  $uB =$  (probability of absorption per unit time), and  $uB' =$  (probability of stimulated emission per unit time). Write down an equation for the rate of change of  $N_2$  with time. Assuming equilibrium, and assuming that the ratio  $N_2/N_1$  is as given by Boltzmann, what do you conclude about  $u$ ?
5. Given  $N$  non-interacting electrons in a box, compute the Fermi energy  $\epsilon_F$  and the total energy at zero temperature. Give two qualitative arguments to suggest that conduction electrons in a metal can be treated as non-interacting.

**6.** Write down the one dimensional Ising model for  $N$  spins, compute the partition function, and from there compute the free energy per spin in the limit of large  $N$ .

Tentamen i Statistisk Fysik I den tjugonionde februari 2008, under tiden 9.00-15.00. Lärare: Ingemar Bengtsson. Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Bedömning: 3 poäng/uppgift. Betyg: 0-2 = F, 3-5 = Fx, 6-8 = E, 9-11 = D, 12-14 = C, 15-18 = B, 19-21 = A.

---

1. The Clausius-Clapeyron equation relates the slope of the phase boundary in a  $P$ - $T$ -diagram to the latent heat of the phase transition. Derive it!

2. A thermodynamical system is described by the entropy function

$$S = \kappa U^{3/4} V^{1/4} ,$$

where  $\kappa$  is some constant. Derive the correct units for  $\kappa$ , and the specific heat  $C_V$  of the system. What is this? What physical constants do you expect to give  $\kappa$  up to a numerical factor?

3. Derive the partition function for the ideal gas. You may use a classical or a quantum mechanical model for the gas, as you please.

4. Take three non-interacting indistinguishable particles, each of which can be in four different one-particle states. What is the total number of states if the particles are fermions? If they are bosons?

5. Consider a two dimensional ideal electron gas. Derive an expression for its density of states  $g(\epsilon)$ .

6. Use a mean field approximation to solve the three dimensional Ising model, for three different choices of lattice. What is the critical temperature?

7. Using the solution to the previous problem, derive the critical exponent  $\beta$  that relates the rate at which the magnetization approaches zero to the rate at which the temperature approaches the Curie temperature.

Tentamen i Statistisk Fysik I den tjugooandra augusti 2007, under tiden 9.00-15.00. Lärare: Ingemar Bengtsson. Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Bedömning: 3 poäng/uppgift, godkänt 9 poäng, väl godkänt 14 poäng.

---

1. Gör en Legendretransformation av  $U = U(S, V)$  till en termodynamisk potential vars naturliga variabler är intensiva storheter. Vad kallas den?
2. Beräkna ytan av en enhetssfär i  $d$  dimensioner. Varför är svaret av intresse i statistisk fysik?
3. För en gas av van der Waals-typ, redogör för (och motivera) "Maxwells konstruktion", d.v.s. hans metod att bestämma trycket vid fasövergången.
4. För en fotongas gäller

$$U = \frac{8\pi^5}{15} \frac{(kT)^a}{(hc)^3} V . \quad (1)$$

Härled härifrån ett uttryck för Stefan-Boltzmanns konstant (som anger hur utstrålad effekt per ytenhet beror av temperaturen). Bestäm också det explicita värdet på exponenten  $a$  via dimensionsanalys.

5. Givet  $N$  icke-växelverkande elektroner i en låda, beräkna Fermi-energin  $\epsilon_F$ . Visa att den totala energin vid temperaturen noll är

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F . \quad (2)$$

Ge två kvalitativa argument som visar varför ledningselektroner i en metall kan behandlas som icke-växelverkande.

6. Kan man ha Bose-Einstein-kondensering i en tvådimensionell låda? Om inte, varför inte?

Tentamen i Statistisk Fysik I den tjugooandra augusti 2007, under tiden 9.00-15.00. Lärare: Ingemar Bengtsson. Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Bedömning: 3 poäng/uppgift, godkänt 9 poäng, väl godkänt 14 poäng.

---

Liten formelsamling:

Boltzmanns konstant:  $k = 1.381 \times 10^{-23}$  J/K

Avogadros tal:  $N_A = 6.022 \times 10^{23}$

---

1. Det specifika värmets för  $\beta$ -mässing, en legering av koppar och zink (gitterstruktur bcc) uppvisar en dramatisk topp kring 460 C. Genom att integrera  $c/T$  finner man att detta svarar mot en entropiökning på omkring 5,8 J/K·mol. Ge en mikroskopisk modell som approximativt leder till detta kvantitativa resultat.

2. Vad är den kemiska potentialen för en fotongas, och varför? Vad är den fundamentala skillnaden mellan en fotongas och en fonongas? Varför är  $e \leq 1$  i formeln

$$\frac{P}{A} = e\sigma T^4 \quad (3)$$

för emissiviteten hos en inte nödvändigtvis svart kropp? (För en svart kropp gäller  $e = 1$ , och  $\sigma$  är Stefans konstant.)

3. I den kanoniska ensemblen, ge allmänna uttryck för den förväntade energin och dess standardavvikelse. I det senare fallet, ge svaret i termer av det specifika värmets och temperaturen.

4. Beräkna Fermi-energin vid  $T = 0$  för en relativistisk och för en icke-relativistisk elektrongas.

5. Modellera en paramagnet som bestående av  $N$  inbördes icke växelverkande dipoler, som var och en kan ha energierna  $\pm\mu B$ , där  $B$  är ett yttre magnetfält. Härled partitionsfunktionen och den fria energin för detta system.

6. Parkorrelationsfunktionen i den 1-dimensionella Ising-modellen kan beräknas på följande sätt: Definiera

$$Z(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{N-1}) = \sum_{\text{tillstånd}} \exp\left(\sum_{i=1}^{N-1} \nu_i s_i s_{i+1}\right) \quad (4)$$

(vilket blir partitionsfunktionen  $Z$  om  $\nu_i = \beta J$  för alla  $i$ ).

Parkorrelationsfunktionen är

$$\langle s_i s_{i+r} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\text{tillstånd}} s_i s_{i+r} \exp\left(\beta J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}\right). \quad (5)$$

Här är  $0 < r < N - i$ . Efter lite reflektion ser man att detta kan skrivas

$$\langle s_i s_{i+r} \rangle = \frac{1}{Z} \left[ \frac{\partial^r}{\partial \nu_{i+r-1} \dots \partial \nu_{i+1} \partial_i} Z(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{N-1}) \right]_{\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{N-1} = \beta J}. \quad (6)$$

Fyll i detaljerna i räkningen och ge  $\langle s_i s_{i+r} \rangle$  som funktion av  $\beta$ ,  $J$  och  $r$ .

Tentamen i Statistisk Fysik I den 23 augusti 2006, under tiden 9.00-15.00. Lärare: Ingemar Bengtsson. Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Bedömning: 3 poäng/uppgift, godkänt 9 poäng, väl godkänt 14 poäng.

---

1. The Helmholtz free energy of the van der Waals gas is

$$F = -\frac{aN^2}{V} - kNT \ln\left(\frac{V - bN}{N}\right) - \frac{3}{2}kNT \ln(3kT) + c_0kNT, \quad (7)$$

where  $c_0$  is some constant. Compute the entropy  $S$  as a function of its natural variables  $U$  and  $V$ .

2. Compute the temperature, volume and pressure at the critical point for the van der Waals gas, whose equation of state can be read out of the previous problem.

3. For a system in the canonical ensemble, with partition function  $Z$ , show that the expected value of the energy is

$$\langle E \rangle = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}. \quad (8)$$

4. For  $N$  non-interacting electrons in a box, compute the Fermi energy  $\epsilon_F$ . Then show that the total energy at zero temperature is

$$U = \frac{3}{5}N\epsilon_F. \quad (9)$$

Also give two qualitative arguments for why conduction electrons in a metal might be treated as non-interacting particles.

5. For non-interacting electrons in a box, show that the degeneracy pressure at zero temperature is

$$P = \frac{2}{3} \frac{U}{V}. \quad (10)$$

6. Schroeder estimates the temperature at the surface of the Earth, given the power absorbed from the sun and assuming that the emissivity is about 0.7. The result comes out too low. Explain how you can increase his estimate by assuming that the atmosphere is a single layer, transparent in the visible and opaque in the infrared. What extra factor do you get in the temperature?

Tentamen i Statistisk Fysik I den nionde juni 2006, under tiden 9.00-15.00. Lärare: Ingemar Bengtsson. Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Bedömning: 3 poäng/uppgift, godkänt 9 poäng, väl godkänt 14 poäng.

---

1. The entropy of the van der Waals gas is

$$S = kN \ln \left[ \frac{V - bN}{N} \left( \frac{U + a\frac{N^2}{V}}{N} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + kc_0N, \quad (11)$$

where  $c_0$  is some constant. Compute the free energy  $F$  as a function of its natural variables  $T$  and  $V$ .

2. For the van der Waals gas, make a rough sketch (supported by some rough calculations!) of the free energy as a function of  $V$ , at some fixed  $T$  such that a phase transition is possible. Explain how the vapour pressure at the phase transition can be read out from your graph.

3. In the canonical ensemble, compute the standard deviation of the expected value of the energy, as a function of the heat capacity and the temperature.

4. Derive the Fermi-Dirac and Bose-Einstein distributions.

5. Show that Bose-Einstein condensation would not occur in an ideal Bose gas, if the dimension of space were equal to two.

6. Let  $s$  denote the “average spin alignment” in the Ising model, with  $n$  nearest neighbours. In the mean field approximation  $s$  obeys

$$s = \tanh(\beta \epsilon n s). \quad (12)$$

Show that, as  $T$  approaches the critical temperature  $T_c$ ,

$$s \propto \left( \frac{T_c - T}{T_c} \right)^\delta. \quad (13)$$

Compute the critical exponent  $\delta$ .

---

If you did not do problem 1, you may do problem 2 starting from the Gibbs function  $G = -kNT \ln(V - bN) + kbN^2T/(V - bN) - 2a^2N^2/V + c(T)$ .

Tentamen i Statistisk Fysik I den tjugofjärde augusti 2005, under tiden 9.00-15.00. Lärare: Ingemar Bengtsson. Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Bedömning: 3 poäng/uppgift, godkänt 9 poäng, väl godkänt 14 poäng.

---

Liten formelsamling:

Stirling:  $\ln N! \sim N \ln N - N$

Ytan av en sfär i  $\mathbf{R}^n$  med radien 1 är  $2\pi^{n/2}/(\frac{n}{2} - 1)!$

---

1. Redogör hur energin, Helmholtz' fria energi, och Gibbs' fria energi är relaterade. Vilka är dessa funktioners naturliga variabler?
2. För en uppsättning av  $N$  icke växelverkande klassiska harmoniska oscillatorer med total energi  $U$ , härled ett uttryck för den tillgängliga fasrumsvolymen  $\Omega$ . Härled härifrån ett uttryck för entropin.
3. Maxwells hastighetsfördelning  $\mathcal{D}(v)$  för en ideal gas är proportionell mot (sannolikheten för att en molekyl har hastighetvektorn  $\vec{v}$ ) gånger (antal vektorer  $\vec{v}$  som svarar mot hastigheten  $v$ ). Förvandla detta till den korrekta formeln!
4. För en harmonisk oscillator ( $E = nh\nu$ ) härled partitionsfunktionen och ett uttryck för det förväntade antalet kvanta  $\bar{n}$  som funktion av temperaturen. Härled härifrån Plancks uttryck för energitätheten i en fotongas i en låda.
5. Formulera och lös den en-dimensionella Ising-modellen för  $N$  spinn.
6. För en van der Waals-gas vid en fix temperatur ges  $P(V)$  och  $G(P)$  av figurerna på nästa sida. Jag har inte ritat in kurvsegmentet mellan  $A$  och  $B$  i den senare. Gör det, och argumentera fysikaliskt för varför den buktar neråt eller uppåt. (Kan systemet befinna sig där?)

Tentamen i Statistisk Fysik I den tredje juni 2005, under tiden 9.00-15.00. Lärare: Ingemar Bengtsson. Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Bedömning: 3 poäng/uppgift, godkänt 9 poäng, väl godkänt 14 poäng.

---

Liten formelsamling:

Stirling:  $N! \sim N \ln N - N$

Ytan av en sfär i  $\mathbf{R}^n$  med radien 1 är  $2\pi^{n/2}/(\frac{n}{2} - 1)!$

---

1. För vissa ideala gaser gäller tillståndsekvationerna

$$U = \frac{3}{2}NkT \quad PV = NkT . \quad (14)$$

Du har glömt Sackur–Tetrodes ekvation, men du kommer ihåg att

$$S = kN[\ln(c_1 V^a N^b U^c) + c_2] , \quad (15)$$

där  $c_1$  och  $c_2$  är konstanter. Använd tillståndsekvationerna, och extensivitet, för att bestämma exponenterna  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

2. För en klassisk ideal gas av  $N$  partiklar i en volym  $V$ , med total energi  $U$ , härled ett uttryck för den tillgängliga fasrumsvolymen  $\Omega$ . Tag hänsyn till att partiklarna är identiska med varandra. Härled härifrån Sackur–Tetrodes ekvation.

3. Modellera en paramagnet som bestående av  $N$  inbördes icke växelverkande dipoler, som var och en kan ha energierna  $\pm\mu B$ , där  $B$  är ett yttre magnetfält. Härled partitionsfunktionen, fria energin, och den förväntade totala energin hos detta system.

4. För icke-relativistiska Bosepartiklar i en 2-dimensionell låda, härled uttrycket för  $g(\epsilon)$ , dvs. tillståndstätheten (som i  $N = \int_0^\infty g(\epsilon)\langle n \rangle d\epsilon$  och liknande formler). Undersök om man kan ha Bose-Einstein kondensering i en 2-dimensionell låda.

5. Modellera en vit dvärgstjärna som en homogen sfär fylld av en Fermigas av elektroner, med  $T = 0$ . Den potentiella energin är

$$U_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (16)$$

där  $R$  är klotets radie. Den kinetiska energin är

$$U_{\text{kin}} = cN\epsilon_F, \quad (17)$$

där den numeriska faktorn  $c$  beror på om elektronerna är relativistiska eller inte. Kan en sådan modell vara stabil, om elektronerna är icke-relativistiska, och om de är relativistiska? (Det gäller alltså att räkna ut Fermienergin. Men det räcker med att besvara frågan, så det enda som behövs är  $R$ -beroendet hos  $\epsilon_F$ . Det är OK om ni räknar ut volymsberoendet av  $\epsilon_F$  för en kubisk stjärna.)

**6.** För en van der Waals-gas vid en fix temperatur har vi

Skissa (kvalitativt, men med motivation) hur Gibbsfunktionen  $G(P, T)$  bär sig åt, som funktion av  $P$  med  $T$  fix.