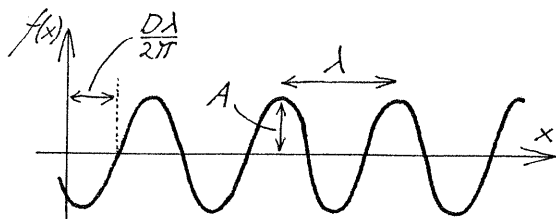


KVANTFYSIKENS PRINCIPER

Vågor, och Heisenbergs osäkerhetsrelation

Vi har sett att objekt som vi vanligen tänker på som partiklar (till exempel elektroner) i själva verket måste beskrivas som vågor. En partikel med rörelsemängd p och energi E motsvarar i någon mening en våg med våglängd $\lambda = h/p$ och frekvens $\nu = E/h$. Vi ska strax återkomma till denna kvantmekaniska beskrivning av materian. Först ska vi diskutera några allmänna egenskaper hos vågor.

Sinusvågen är den enklaste av alla vågor:



$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - D\right)$$

A är vågens *amplitud*

D bestämmer hur mycket vågen är förskjuten längs x -axeln.

Det visar sig också praktiskt att införa *vågtalet* $k = 2\pi/\lambda$. Uttrycket för vågen kan då skrivas

$$f(x) = A \sin(kx - D)$$

Detta uttryck ger en "stillbild" av vågen. Säg nu att den rör sig med jämn fart åt höger. I så fall måste D växa i proportion med tiden:

$$D = \omega t$$

där ω är en konstant. Om vi betraktar en speciell punkt längs x -axeln (till exempel $x = 0$) och hur vågen varierar just där, ser vi att med $D = \omega t$ utför vågen en hel svängning under tiden $2\pi/\omega$. Detta är alltså svängningstiden T . Men vi vet att frekvensen ν definieras som ett genom T , så

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{eller} \quad \omega = 2\pi\nu$$

ω kallas *vinkelfrekvensen* och anger hur många radianer vågen "hinner med" varje sekund. (En hel svängning betraktas som ett varv, alltså 2π radianer.)

Låt oss sammanfatta allt detta:

En våg som rör sig i positiv x -led och som har våglängden λ och frekvensen ν beskrivs av funktionen

$$f(x) = \sin(kx - \omega t)$$

där vågtalet k och vinkelfrekvensen ω ges av

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = 2\pi\nu$$

Notera att med de nya storheterna vågtal och vinkelfrekvens så kan formlerna för hur energin och rörelsemängden svarar mot vågegenskaper skrivnas så här:

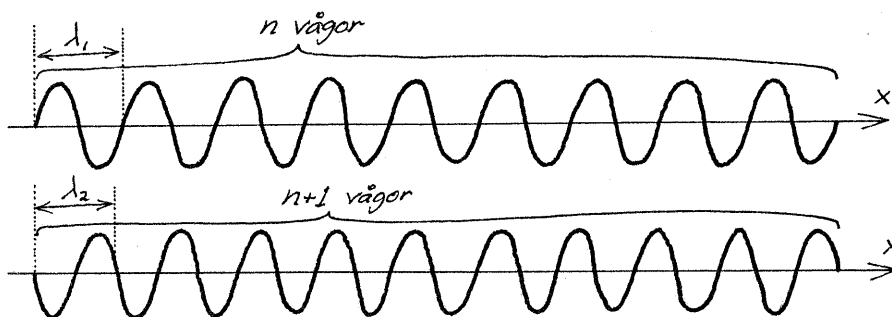
$$p = \hbar k \qquad E = \hbar \omega$$

där $\hbar = h/(2\pi)$. (Denna konstant uttalas "h-streck".)

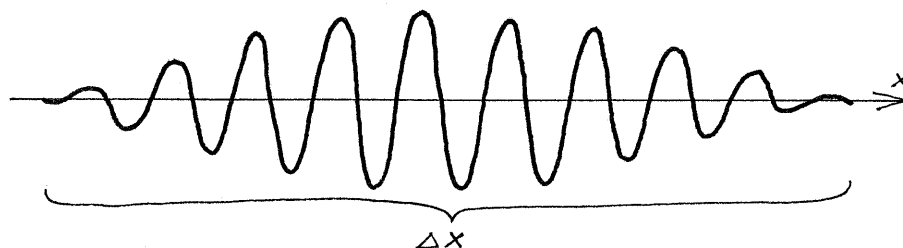
Vi vet nu hur man matematisk beskriver en våg med en viss våglängd och frekvens. En sådan våg motsvarar en "partikel" med viss rörelsemängd och energi, enligt formlerna ovan. Vi har uppenbarligen ett stort problem i denna korrespondens mellan våg och partikel: En partikel uppfattar vi som ganska väl lokaliserad – en partikel *är* någonstans. Men den våg vi just beskrivit befinner sig utspridd *längs hela x-axeln!*

Vi ska nu bekanta oss med en mycket central matematisk egenskap hos harmoniska vågor (d v s sinus- och cosinusvågor) som löser detta problem åt oss, och som dessutom visar sig grundläggande för hela kvantmekaniken.

Här är två vågor med lite olika våglängder, λ_1 respektive λ_2 :



Vågorna har förstås oändlig utsträckning i båda riktningarna, men i figuren syns endast ett visst antal våglängder av den ena vågen, säg n stycken, och precis en mer, $n + 1$, av den andra. Låt oss nu *addera* dessa två vågor med varandra, d v s för varje punkt längs x -axeln lägger vi samman vågornas där:



Eftersom vågorna är i motfas vid utkanterna av intervallet så släcker de ut varandra där, medan de å andra sidan förstärker varandra i intervallets mitt. Detta utseende hos summan av de två vågorna upprepar sig oändligt många gånger i de båda riktningarna. Man kan visa att genom att addera oändligt många vågor – alla med våglängder ungefär som λ_1 och λ_2 – så kan vi släcka ut alla dessa andra bumpar som ligger utanför figuren. Resultatet blir en enda bump med ungefärlig utsträckning Δx – ett så kallat *vågpaket*.

Ur figuren kan vi få fram ett samband mellan vågpaketets ungefärliga bredd Δx och det ungefärliga våglängdsintervall $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ som ingår i den oändliga summan av sinusvågor som bygger upp vågpaketet.

Vi börjar med att observera att den första vågen får plats med n våglängder på samma intervall som den andra får plats med $n + 1$ stycken. Detta betyder att

$$n\lambda_1 = (n + 1)\lambda_2$$

ur vilket vi kan lösa ut n :

$$n = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\Delta\lambda}$$

Vågpaketets bredd Δx är ju $n\lambda_1$. Om vi i detta sätter in uttrycket för n får vi

$$\Delta x = n\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{\Delta\lambda}\lambda_1 \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

om vi antar att $\lambda_1 \approx \lambda_2$ och låter λ beteckna denna ungefär gemensamma våglängd. Resultatet kan vi skriva så här:

$$\Delta x \cdot \Delta\lambda \approx \lambda^2 \quad (1)$$

Detta är en relation mellan vågpaketets bredd Δx och intervallet $\Delta\lambda$ av våglängder som det är uppbyggt av. Vi kan också säga att det är en relation mellan *osäkerheten i position* och *osäkerheten i våglängd*.

Vad betyder nu allt detta för kvantmekaniken?

Jo, vi önskar beskriva exempelvis en elektron som en våg med en viss våglängd som är relaterad till elektronens rörelsemängd enligt

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Men samtidigt bör elektronens position vara något så när välbestämd – vi vill inte ha en beskrivning av elektronen som kräver att den är utspridd precis överallt, så som fallet är med en enkel sinusvåg. Lösningen är att beskriva elektronen som ett vågpaket. Vi har just sett den matematiska innebörden av detta: ett vågpaket får man genom att addera många olika sinusvågor med lite varierande våglängd. Att elektronen är ett vågpaket måste därför innebära att dess våglängd är lite obestämd, något som då även måste gälla dess rörelsemängd.

Vi kan ganska enkelt översätta “osäkerhetsrelationen” (1) ovan mellan position och våglängd, till en motsvarande relation mellan position och rörelsemängd.

Notera först att

$$p = \frac{h}{\lambda} \implies \frac{dp}{d\lambda} = -\frac{h}{\lambda^2}$$

Om vi bestämmer oss för att definiera osäkerheten i rörelsemängd Δp som ett positivt tal så innebär detta att

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

Om vi använder detta i relationen (1) ovan mellan Δx och $\Delta\lambda$ får vi

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h$$

Detta är den berömda *Heisenbergs osäkerhetsrelation*. Den sätter en gräns på hur välbestämda ett objekts läge och rörelsemängd kan vara på samma gång. Om man vet väldigt väl *var* ett föremål befinner sig, har detta föremål med nödvändighet en väldigt odefinierad rörelsemängd. Och omvänt: vet man nästan exakt vilken rörelsemängden är så kan föremålet finna sig nästan var som helst.

Det kan förstås finnas många anledningar till att osäkerheterna Δx och Δp är *större* än så här. Relationen ger bara en lägsta gräns på dessa. Därför brukar man skriva den med olikhetstecken. Man brukar också skriva \hbar snarare än h – detta har att göra med de exakta definitionerna av osäkerheterna Δx och Δp . Så här ska den alltså se ut:

Heisenbergs osäkerhetsrelation

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

För enkelhetens skull har vi här begränsat diskussionen till en dimension, och detta kommer oftast vara tillräckligt även i fortsättningen. I tre dimensioner har man en osäkerhetsrelation för varje riktning:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar$$

p_x , p_y och p_z betecknar här rörelsemängdsvektorns tre komponenter. Observera att det inte finns någon osäkerhetsrelation mellan till exempel y och p_x : det finns inget som hindrar fullständig kännedom om var en partikel befinner sig i y -led samtidigt som man vet hur stor dess rörelsemängd i x -led är.

Ofta framställs osäkerhetsrelationen som något mystiskt, men i själva verket är den bara en direkt konsekvens av materiens vågnatur. Och det är ju ingen som tycker att det är särskilt mystiskt att man inte exakt kan besvara frågan om var en våg befinner sig.